Analysis-VO 18.6.2018

Uneigentliche Intervalle

... (Tafel 1 + 2)

Satz (Integralvergleichskriterium) ← falls Stammfunktion nicht bekannt

...

BW

f monoton fallend $\Rightarrow$ $$f(k+1) \leq \underbrace{\int_k^{k+1} f(x)\,dx}_{\text{Mittelwertsatz}} \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = f(\xi)\underbrace{(k+1-k)}_{1}, \quad \xi \in [k, k+1]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx}_{= \int_1^{n+1} f(x)\,dx} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$f(\xi) \in [f(k+1), f(k)]$$

$\overset{\text{mon. fall.}}{\Rightarrow}$ $f(k+1) \leq f(\xi) \leq f(k)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim \int_1^{n+1} f(x)\,dx \underset{\substack{\text{Sandwich-}\\ \text{lemma}}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

folgt, dass

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

folgt dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) < \infty \Rightarrow f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) < \infty$$

$\boxtimes$

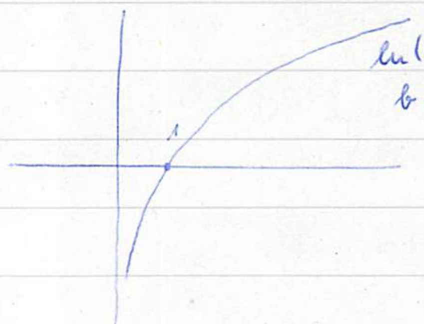
Konvergenz d. Integrals $\Leftrightarrow$ Konvergenz d. Folge

Beispiele

(i) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{f(k)}$ divergiert, denn

$$\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx}_{= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \underbrace{\ln(1)}_{0})}$$ divergiert.

existiert nicht, d.h. $\lim_{b\to\infty} \ln(b)$ ist keine Zahl



$\ln(b) \to \infty$
$b \to \infty$

(ii) $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{\in \mathbb{R}, \text{ da } f(x) = e^{-x^2},\ x\in[0,1], \text{ stetig}} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\in \mathbb{R}, \text{ denn}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{e^{-1}}_{\frac{1}{e} < 1})^k = \frac{1}{1-e^{-1}}$$

$e^{-k^2} = e^{-k-k^2+k}$

$= e^{-k} \cdot e^{-k^2+k}$

$$= e^{-k} \cdot \sum e^{\overbrace{k(1-k)}^{\leq 0\ \forall k \in \mathbb{N}}} \leq e^{-k}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \text{ konvergiert}$$

(

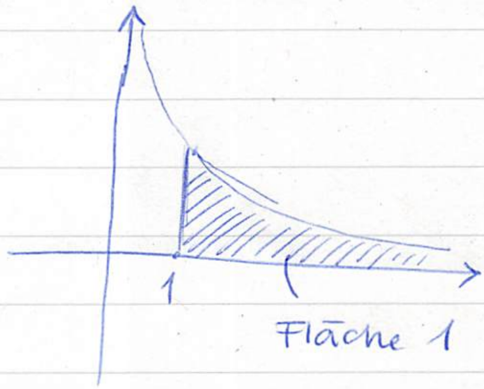
Vergleichskriterium

(iii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, denn

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \underbrace{x^{-2}}_{\substack{\text{Stammfunktion} \\ F(x) = -x^{-1}}}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-b^{-1}+1\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\underbrace{\frac{1}{b}}_{\to 0}+1\right) = 1$$



(iv) Energie, um 1kg aus dem Ruhestand von der Erdoberfläche ins Unendliche zu heben.

$$\int_{\underbrace{R}_{\text{Radius d. Erde}}}^{\infty} 9{,}81\,\frac{R^2}{s^2}\,ds = \underbrace{\int_1^\infty \underbrace{9{,}81\,\frac{R^2}{s^2}}_{f(s)}\,ds}_{\in \mathbb{R}\text{, denn}} - \underbrace{\int_1^R 9{,}81\,\frac{R^2}{s^2}\,ds}_{\in \mathbb{R}\text{, denn}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} 9{,}81\,\frac{R^2}{k^2} =$

$9{,}81 \cdot R^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergiert}}$

$f(s) = 9{,}81 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{s^2}$, $s \in [1, R]$, stetig

$$\Rightarrow \int_R^\infty 9{,}81 \cdot \frac{R^2}{s^2}\, ds \quad \text{konvergiert}$$

Taylorpolynome, Taylorreihen

Satz: (Folgerung aus dem Hauptsatz 5.10)

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff.bar
(d.h. $f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ existieren und $f^{(n+1)}$ ist stetig)

f' n-mal stetig diff.bar
f'' $(n-1)$-mal —— " ——
usw.

Dann gilt für $x_0 \in [a, b]$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)} x_0}{k!} \cdot (x - x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom in } x} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt}_{\text{Restglied abhängig von } x\text{, d.h. eine Funktion von } x}$$

Beispiele

(i) $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, unendlich (beliebig) oft stetig diff.bar

$$\underset{x_0 = 0}{\sin(x) =} \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\cos(0)}{1!} \cdot (x-0)}_{= x} - \underbrace{\frac{\sin(0)}{2!} \cdot (x-0)^2}_{= 0} - \ldots$$

*

$$* \ldots \underbrace{-\frac{\cos(0)}{3!}(x-0)^3}_{-\frac{x^3}{3!}} + \ldots =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cancel{\frac{x^k}{k!}} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(ii) $f(x) = \arcsin(x)$, $x \in [-1, 1]$,
unendlich (beliebig) oft auf $(-1, 1)$
stetig diff.bar. Es gilt

$$\arcsin(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x=0}}{=} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} =$$

$$= \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{[\arcsin(0)]'}{1!}(x-0)}_{=x} + \ldots *$$

gesucht $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:
$\sin y = 0$

$$* \ldots \underbrace{\frac{[\arcsin(0)]''}{2!}}_{=0} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{[\arcsin(0)]'''}{3!} x^3}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}} + \ldots$$

$[\arcsin(x)]'$
$=$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$[\arcsin(x)]''$
$=$
$\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]' =$
$\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$
$-\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$

$$[\arcsin(x)]''' = \left[x \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]' =$$

$$(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x)$$

Wichtig: $\sin(x), \dots$ kann man mithilfe von Taylor-Polynomen approximieren, d.h. das Integral $\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \dots$ wird bei der Approximation vernachlässigt

Beweis

IA $n=0$ (nach dem Hauptsatz 5.10) hat die stetige Funktion F-n f' (da f $\underbrace{(n+1)}_{=0}$ stetig diff.bar $\Rightarrow$ f' stetig)

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Stammf-n von } f'} = \overbrace{f(x_0)}^{\text{Konst.}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}_{\text{vgl. mit Hauptsatz}}$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Stammf-n G von g

** Kontrolle:

$$u'(t) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot (x-t)^{n-1}\,(-1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{erstes Taylorpolynom}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}_{\text{Restglied}}$$

IV $f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$

IS Partielle Integration von

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^{n-1}}_{u'(t)}\,\underbrace{f^{(n)}}_{v(t)}(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot(x-t)^n\, f^{(n)}(t)}_{u(t)\cdot v(t)}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x}^{x_0} \underbrace{(x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)}_{u(t)\,v'(t)}\,dt = *$$

$u(t) = -\frac{1}{n}\cdot(x-t)^n$; $v'(t) = f^{(n+1)}(t)$ **

$$* = 0 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int \ldots$$

Anwendung v. Polynomen ◦ in Computergrafik
Computeranimation
◦ ...

19.6. Fragestunde
25.6. weitere Anwendungen + Zaubertricks
26.6. keine VO (UE = Fragestunde)   Blatt 13 + Musterlösung

2. Prüfungstermin: 28. Sept.
3. Prüfungstermin: 9. Jänner

Grenzwerte von Funktionen und die Regel von de L'Hospital

Def.: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, so dass

$$\underbrace{\forall \delta > 0 : \exists x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta}$$

d.h. die Menge $\{x \in D \setminus \{x_0\} : |x-x_0| < \delta\}$ ist nicht leer, x_0 heißt Häufungspunkt von D

Man sagt, dass der GW von f bei x_0 existiert und gleich y_0 ($y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = -\infty$, $y_0 = +\infty$),

d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$|f(x) - y_0| < \varepsilon$$

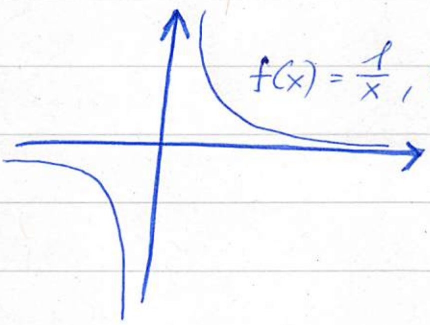
Bemerkung:

(i) Falls $y_0 = f(x_0)$, dann besagt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D \setminus \{x_0\} :$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

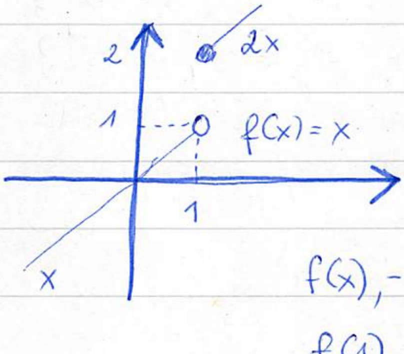
dass f stetig an der Stelle $x_0 \in D$.

(ii) $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f(x_0)$ nicht definiert, z.B.



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$ existiert nicht

(iii) $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f(x_0)$ nicht definiert, z.B.

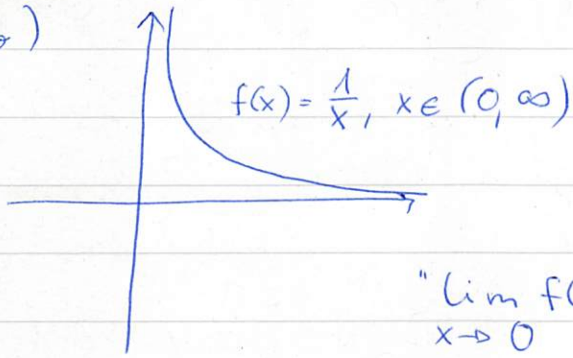


$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = y_0$

$f(x), \ x \in (-\infty, 1)$

$f(1)$ nicht definiert

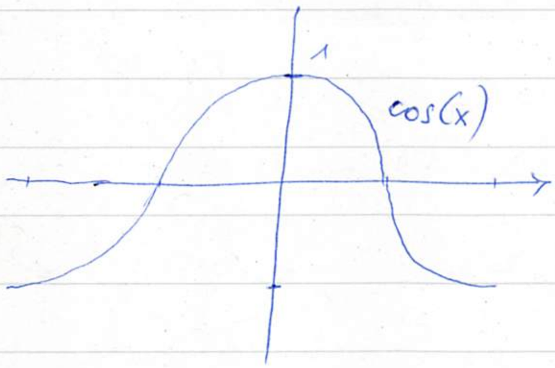
(iv)



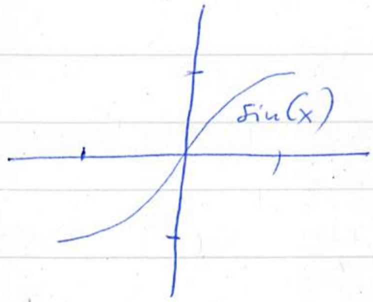
"$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$"

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nach oben unbeschränkt für $x \to 0$

(v) $\underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}}_{\text{sind in der } \frac{0}{0} \text{ Situation}} = \lim_{x \to 0} \frac{[\sin(x)]'}{x'} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1}}_{\text{sind in der Situation } \frac{\cancel{0}1}{1}} = \cancel{0}\,1$



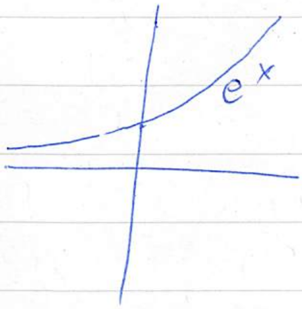
(vi) $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$



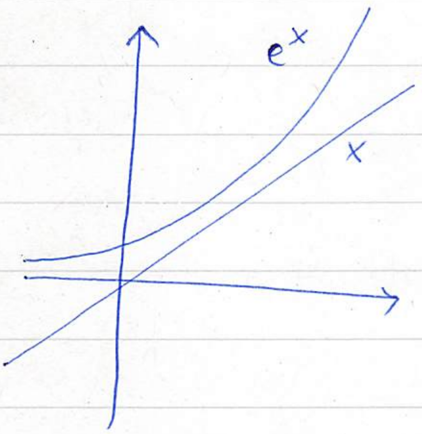
(vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

bedeutet zusätzlich dass f schneller als g wächst

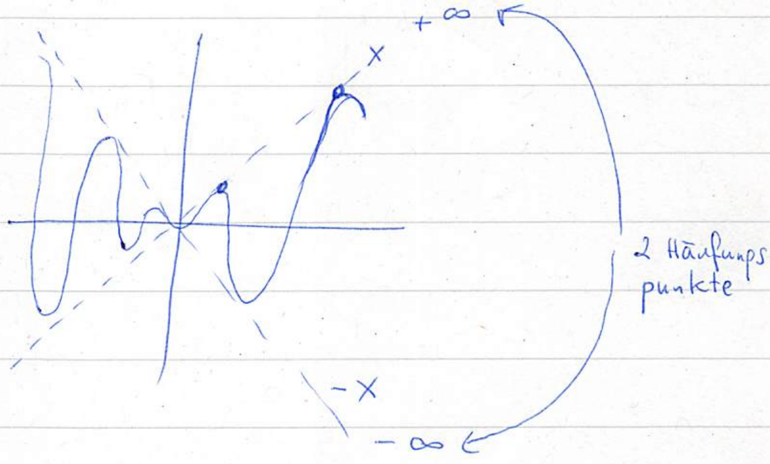


d.h. e^x ist nach oben unbeschränkt für $x \to \infty$

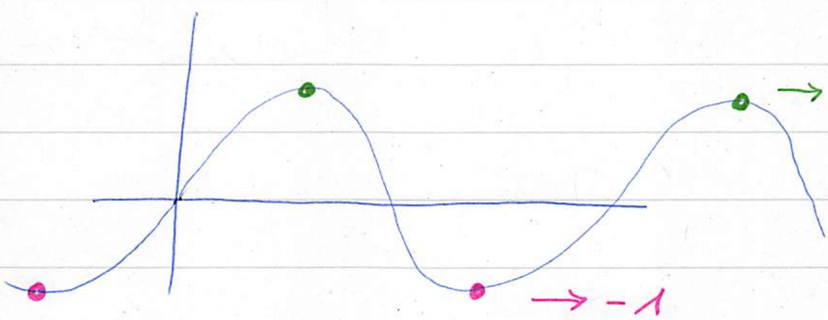


(viii) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{x \cdot \sin(x)}_{\text{unbeschränkt}}$

aber diser GW ist weder $+\infty$ noch $-\infty$



(ix) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ ist weder $+\infty$ noch $-\infty$



Satz (L'Hospital)

... (Folien)

Beweis Hauptsatz 5.10 $\Rightarrow$ $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$

$$g(x) = \underbrace{g(x_0)}_{=0} + \int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\int_{x_0}^{x} f'(t)dt}{\int_{x_0}^{x} g'(t)dt} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)\cancel{(x-x_0)}}{g'(\tilde{\xi})\cancel{(x-x_0)}} =$$

$\xi, \tilde{\xi} \in [x_0, x]$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

∎